54. Mezinárodní matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Padesátý čtvrtý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 18. do 28. července 2013 v Kolumbii, v městech Barranquilla a Santa Marta. Soutěže se zúčastnilo 527 soutěžících z 97 zemí.

České družstvo tvořili tito žáci: *Michal Buráň* z Gymnázia J. A. Komenského v Uherském Brodu, *David Hruška* Gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni, *Mark Karpilovskij* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Svoboda* z Gymnázia Frýdlant nad Ostravicí, *Štěpán Šimsa* z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích a *Radovan Švarc* z Gymnázia v České Třebové. Účast českého týmu byla z větší části dotována ministerstvem mládeže, školství a tělovýchovy (zhruba ze sedmdesáti procent), zbylé prostředky poskytl *Nadační fond Karla Janečka na podporu vědy a výzkumu*, bez jehož pomoci by se český tým soutěže jen obtížně zúčastnil. Vedoucím českého týmu byl *Martin Panák* z Masarykovy univerzity v Brně, pozici zástupce vedoucího a pedagogického vedoucího zastal *Josef Tkadlec*, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Pro vedoucí národních delegací, kteří tvoří dohromady mezinárodní jury, začala olympiáda osmnáctého července v městě Barranquilla, což je s více než 1 700 000 obyvateli čtvrté největší kolumbijské město. Po seznámení se z úlohami z tzv. short-listu, tj. užšího výběru z návrhů zaslaných z různých zemí, zejména pak s jejich obtížností, vybrala jury šestici soutěžních úloh.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Santa Marty 21. července. Byli ubytováni v bungalovech v luxusním rekreačním středisku, přímo na pláži Karibiku.

Slavnostní zahájení olympiády se konalo 22. července v Barranquille, v prostorách Severní univerzity (Universitad del Norte). Zahájení se zúčastnila ministryně vzdělávání Kolumbie, *Maria Fernanda Campo Saavedra*, primátorka města Barranquilla *Elsa Noquera de la Espriella*. Obě dvě dámy oslovily účastníky zhruba čtvrhodinovými projevy, přičemž projev ministryně byl ve španělštině. Nejdelší projev ovšem přednesla předsedkyně mezinárodní jury *Mary Falk de Losada*, které její rázné chování při řízení schůzí jury vyneslo mezi vedoucími národních týmů přezdívku „železná lady". K maratonu projevů se nepřipojila hlavní organizátorka, předsedkyně organizačního výboru olympiády, *Maria Losada*, dcera předchozí jmenované. Po projevech následovalo defilé všech zúčastněných družstev.

Soutěžními dny byly 23. a 24. červenec. Účastníci každý z těchto dnů řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny nejrůznější exkurze a soutěže, nicméně soutěžící si užívali především Karibského moře a velmi dobré stravy v přilehlém rekreačním středisku. Vedoucí se ve stejném čase věnovali opravám úloh svých žáků. Jejich řešení byla po soutěži zkopírována a nezávisle opravena též koordinátory, kterými byli zkušení matematici z celého světa. Po opravách se vedoucí a koordinátoři sešli, porovnali bodová ohodnocení, která udělili, a společně dospěli k závěrečnému bodovému hodnocení. Celý tento proces trval tři dny.

České družstvo dosáhlo výborných výsledků. Po osmi letech jsme se znovu dočkali zlaté medaile, kterou byl oceněn Štěpán Šimsa z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích za zisk 31 bodů. Tímto jsme v pomyslném souboji porazili Slovensko, které si tento rok žádnou zlatou medaili neodvezlo, neboť i jejich notorický sběratel zlatých medailí, Martin Vodička, získal „pouze“ stříbrnou medaili. Další tři naši soutěžící – Michal Buráň, Mark Karpilovskij a Radovan Švarc – pak vybojovali bronzové medaile. Ani zbylí dva účastníci, David Hruška a Josef Svoboda však neodjeli s prázdnou, když byli oceněni čestnými uznáními za (alespoň) jednu zcela bezchybně vyřešenou úlohu. Celkově získalo družstvo 108 bodů a skončilo v neoficiálním pořadí zemí na 37. pozici.

Absolutními vítězi olympiády se stali shodným ziskem 41 bodů (o jeden bod méně, než bylo dosažitelné maximum) Číňan *Yutao Liu* a Jihokorejec *Eunsoo Jee.* V soutěži družstev se vše vrátilo k obvyklému stavu, neboť opět zvítězila Čína a nechala za sebou loňského překvapivého vítěze Jižní Koreu. Třetí se opět umístily Spojené státy americké.

Dodejme ještě, že příští, 55. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v Kapském Městě (Jihoafrická republika) v termínu od 3. do 13. července 2014.

V další části uvádíme texty všech šesti soutěžních úloh:

1. soutěžní den (23. 7. 2013)

Úloha 1. Dokažte, že pro libovolnou dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nutně různých) takových, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(Japonsko)

Úloha 2. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme *kolumbijským*, jestliže je 2013 z těchto bodů obarveno červeně, 2014 modře a žádné tři z těchto bodů neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je *dobrá* pro dané rozmístění, jestliže

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů existuje skupina k dobrých přímek. *(Austrálie)*

Úloha 3. V trojúhelníku ABC nechť se kružnice připsaná ke straně BC dotýká této strany v bodě A_1. Analogicky nechť body B_1, resp. C_1, jsou body dotyku kružnic připsaných ke straně AC, resp. ke straně AB, s těmito stranami. Nechť střed kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA. Obdobně je definována kružnice připsaná ke straně AC, resp. AB. *(Rusko)*

2. soutěžní den (24. 7. 2013)

Úloha 4. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek H a nechť W je bod na straně BC ($W \neq B$, $W \neq C$). Označme M, resp. N, patu výšky z bodu B, resp. z bodu C. Označme dále ω_1 kružnici opsanou trojúhelníku BWN a nechť X je bod na této kružnici takový, že úsečka WX je průměrem kružnice ω_1. Analogicky nechť ω_2 je kružnice opsaná trojúhelníku CWM a Y bod na ní takový, že úsečka WY je průměrem kružnice ω_2. Dokažte, že body X, Y a H leží na přímce. *(Thajsko)*

Úloha 5. Nechť $\mathbb{Q}$ značí množinu kladných racionálních čísel. Uvažme funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$,
(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$,
(iii) existuje $a \in \mathbb{Q}$, $a > 1$ takové, že $f(a) = a$.

Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. *(Bulharsko)*

Úloha 6. Nechť $n \geq 3$ je celé číslo a mějme $n+1$ bodů, rovnoměrně rozložených na kružnici. Uvažujme o očíslováních těchto bodů čísly $0, 1, \ldots, n$ (každé číslo je použito právě jednou). Dvě taková očíslování považujeme za stejná, jestliže jedno přejde na druhé nějakou rotací kružnice. Očíslování nazveme *krásným*, jestliže pro libovolná čtyři čísla $0 \leq a < b < c < d \leq n$ taková, že $a + d = b + c$, tětiva spojující body očíslované a a d neprotíná tětivu spojující body očíslované b a c.

Nechť M značí počet krásných očíslování a N počet uspořádaných dvojic (x, y) kladných celých čísel takových, že $x + y \leq n$ a $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$. Dokažte rovnost

$$M = N + 1.$$

(Rusko)

Na závěr uvádíme jak přehled absolutního pořadí, cen a bodových zisků českých účastníků soutěže, tak celkové pořadí zúčastněných zemí.

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
34.	Štěpán Šimsa	7	7	3	7	7	0	31	**Z**
180.	Michal Buráň	7	0	0	7	6	0	20	B
196.	Mark Karpilovskij	7	3	0	7	1	0	18	B
211.	Radovan Švarc	6	4	0	7	0	0	17	B
282.	Josef Svoboda	1	6	0	7	0	0	14	HM
355.	David Hruška	1	0	0	7	0	0	8	HM
	Celkem	29	20	3	42	14	0	108	

Tabulka pořadí zemí:

	Země	Medaile G	S	B	b.		Země	Medaile G	S	B	b.
1.	ČLR	5	1	0	208	48.	Rakousko	0	1	1	77
2.	Korea	5	1	0	204	48.	Nový Zéland	0	0	2	77
3.	USA	4	2	0	190	51.	Gruzie	0	0	2	75
4.	Rusko	4	2	0	187	52.	Ázerbájdžán	0	0	2	73
5.	KLDR	2	4	0	184	53.	Filipíny	0	0	3	72
6.	Singapur	1	5	0	182	54.	Moldavsko	0	0	2	71
7.	Vietnam	3	3	0	180	55.	Estonsko	0	0	2	67
8.	Tchaj-wan	2	4	0	176	56.	Srí Lanka	0	0	1	65
9.	Velká Británie	2	3	1	171	56.	Tádžikistán	0	0	1	65
10.	Írán	2	3	1	168	58.	JAR	0	0	2	64
11.	Kanada	2	2	2	163	59.	Španělsko	0	0	2	63
11.	Japonsko	0	6	0	163	60.	Švédsko	0	1	1	62
13.	Izrael	1	3	2	161	61.	Bangladéš	0	0	3	60
13.	Thajsko	1	4	1	161	62.	Kostarika	0	0	1	59
15.	Austrálie	1	2	3	148	63.	Bosna a Hercegovina	0	0	1	56
16.	Ukrajina	1	3	1	146	64.	Kypr	0	0	1	52
17.	Mexiko	0	3	3	139	65.	Tunisko	0	0	1	49
17.	Turecko	1	2	3	139	66.	Lotyšsko	0	0	1	47
19.	Indonésie	1	1	4	138	67.	Argentina	0	0	1	46
20.	Itálie	1	2	1	137	67.	Finsko	0	1	0	46
21.	Francie	0	2	4	136	69.	Ekvádor	0	0	1	45
22.	Bělorusko	1	2	3	134	70.	Paraguay	0	0	2	38
22.	Maďarsko	0	2	4	134	71.	Kyrgyzstán	0	0	1	36
22.	Rumunsko	0	3	3	134	71.	Norsko	0	0	1	36
25.	Nizozemí	0	2	3	133	73.	Chile	0	0	1	35
26.	Peru	0	3	2	132	74.	Makedonie	0	0	1	34
27.	Německo	0	2	4	127	74.	Slovinsko	0	0	0	34
28.	Brazílie	0	3	1	124	76.	Irsko	0	0	0	33
29.	Indie	0	2	3	122	77.	Dánsko	0	0	0	31
30.	Chorvatsko	2	0	2	119	78.	Island	0	0	0	27
31.	Hongkong	0	1	5	117	79.	Kosovo	0	0	0	25
31.	Malajsie	0	2	3	117	79.	Lucembursko	0	0	1	25
33.	Kazachstán	0	1	4	116	79.	Pákistán	0	0	0	25
34.	Srbsko	1	1	2	112	82.	Nikaragua	0	0	0	22
34.	*Slovensko*	0	1	3	112	83.	Panama	0	0	0	19
36.	Portugalsko	1	0	4	111	84.	Nigérie	0	0	1	18
37.	*Česká republika*	1	0	3	108	85.	Maroko	0	0	0	17
38.	Bulharsko	0	1	2	101	86.	Trinidad a Tobago	0	0	0	16
38.	Řecko	0	2	1	101	87.	Lichtenštejnsko	0	0	1	15
40.	Arménie	0	1	1	88	88.	Portoriko	0	0	0	14
40.	Švýcarsko	0	0	3	88	88.	Salvador	0	0	0	14
42.	Mongolsko	0	0	3	84	88.	Sýrie	0	0	0	14
42.	Saúdská Arábie	0	0	4	84	91.	Kuba	0	0	0	11
44.	Belgie	0	1	2	82	92.	Venezuela	0	0	0	9
45.	*Polsko*	0	1	1	79	93.	Uruguay	0	0	0	7
46.	Litva	0	0	3	78	94.	Bolívie	0	0	0	5
46.	Turkmenistán	0	0	4	78	95.	Černá Hora	0	0	0	1
48.	Kolumbie	0	0	2	77	95.	Uganda	0	0	0	1
						97.	Honduras	0	0	0	0