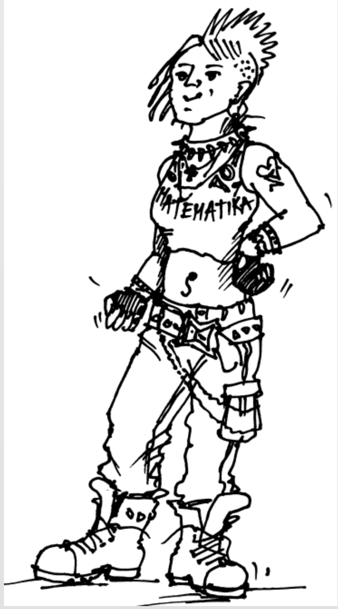
MASARYKOVA UNIVERZITA

Matematika drsně a svižně

-- nekonvenční projekt výuky a učebnice –

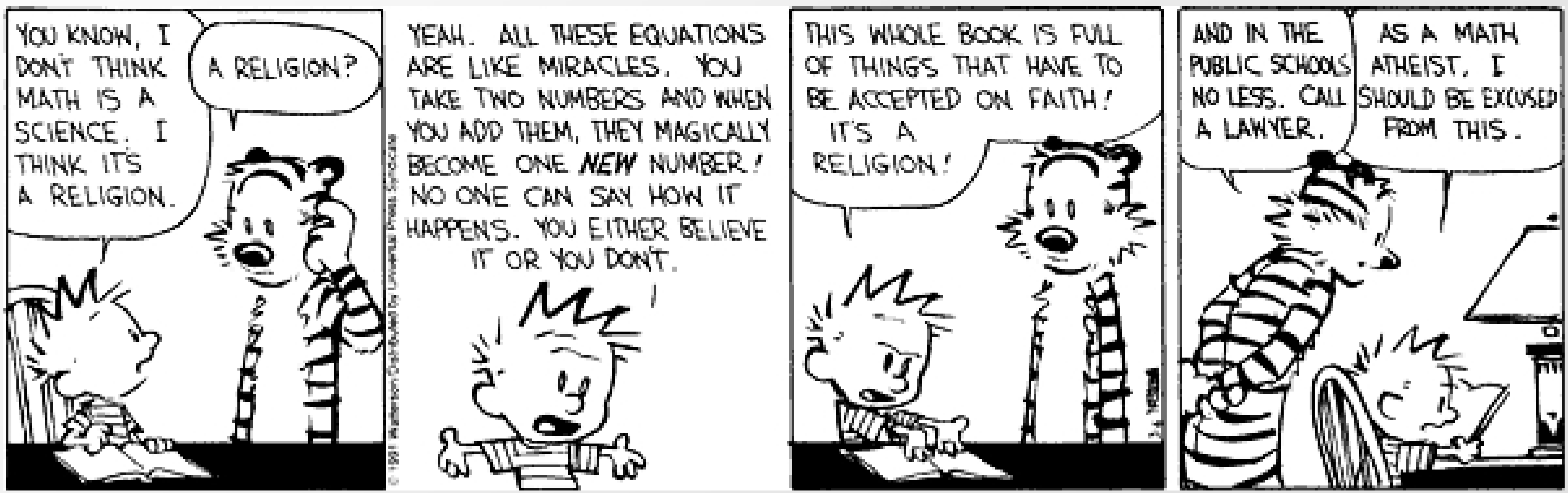
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne



Jak vlastně studenti vnímají matematiku?

- … počítání s čísly?
- … pravidla na „přerovnávání písmenek“?

Je velmi obtížné je přesvědčit, že jde o způsob myšlení!



Jak učíme Matematiku?

- Většina vyučujících kolem mne se snaží dělat vše dokonale **„správně"** a patrně věří, že (alespoň ti dobří) studenti sami časem pochopí, že je matematika krásná a užitečná.
- Druhá možnost je soustředit se na **„správné"** věci, prezentovat je jako **užitečné nástroje** (a doufat, že aspoň ti dobří se doberou i správného pochopení).
- Můžeme dělat vše **„dokonale už napoprvé"** a témata zařazovat, až je studenti mohou zvládat dokonale.
- Druhá možnost je načínat témata v jednoduché podobě a **„vracet se k nim"** s novými aplikacemi (a napodruhé a napotřetí je snad pochopení snazší).

Co děláme pro správný vjem studentů?

- Někdo potřebuje **napřed intuici** a teprve **potom techniku**, většina populace to ale vnímá **opačně** (viz např. Jungovská typologie, třeba ve verzi MBTI typologie užívané současnou personalistikou).
- V malých skupinách u klasického kontaktu učitelů a žáků je možné **„předávat prožitek i názor"**. U velkých skupin toto zpravidla selhává.
- Není možné očekávat, že existuje **„správná metoda"** výuky, protože při větších skupinách je skoro nemožné oslovit všechny typy osobností naráz.

- Rozdělení MBTI typů v USA (data z 2010)

ISTJ 11–14%	ISFJ 9–14%	INFJ 1–3%	INTJ 2–4%
ISTP 4–6%	ISFP 5–9%	INFP 4–5%	INTP 3–5%
ESTP 4–5%	ESFP 4–9%	ENFP 6–8%	ENTP 2–5%
ESTJ 8–12%	ESFJ 9–13%	ENFJ 2–5%	ENTJ 2–5%

Dichotomies

Extraversion (**E**) – (**I**) Introversion

Sensing (**S**) – (**N**) Intuition

Thinking (**T**) – (**F**) Feeling

Judging (**J**) – (**P**) Perception

		ESTP	ESFP	ENFP	ENTP
A	*Managers*	2.7	2.8	6.9	4.9
B	*Small Bus*	7.3	4.0	2.0	2.0
C	*Retail*	2.5	1.0	0.3	1.6
D	*Banking*	4.2	2.0	3.7	6.6
E	*Telephone*	4.0	0.0	5.0	6.9
F	*Inc. 500*	5.7	1.3	1.3	11.3
G	*Accounting*	1.9	0.5	4.2	3.8
H	*Supervisors*	4.3	0.0	1.4	2.9
I	*Mid Mgrs*	3.1	1.9	2.5	6.2
J	*Executives*	3.0	1.5	7.5	10.4

		ESTJ	ESFJ	ENFJ	ENTJ
A	*Managers*	17.0	7.3	4.9	10.1
B	*Small Bus*	28.0 +	4.0	0.0	5.3
C	*Retail*	46.5 +	2.5	0.3	10.1
D	*Banking*	25.5 +	6.6	2.9	9.7
E	*Telephone*	26.7 +	0.0	2.0	17.3
F	*Inc. 500*	9.4	0.6	3.1	13.8
G	*Accounting*	20.2 +	4.7	2.8	9.4
H	*Supervisors*	15.7	4.3	7.9	7.1
I	*Mid Mgrs*	14.3	3.7	2.5	11.2
J	*Executives*	16.4	1.5	4.5	20.9 +

DOI 10.1037//1061-4087.52.2.117
Consulting Psychology Journal: Practice and Research, Vol. 52, No. 2, 117–132

Dokonalá technika versus intuice – PROČ nebo JAK?

- Moje východiska pro „servisní" matematiku na FI MU (iniciace v diskusích s Jiřím Zlatuškou r. 2004):
  - Soustředit se zkraje na prakticky užitečná témata se snadno formulovanou intuicí i algoritmy.
  - Vracet se k tématům s přibývajícími nástroji a co nejvíce řešit konkrétní a prakticky srozumitelné úlohy.
  - Rozšířit/modifikovat formy výuky tak, aby vyhovovala všem typům osobností.
- Důsledek:
  - budovat **přednostně intuici diskrétní matematiky**, **spojité modely jsou zapotřebí později** pro rozbor robustnosti, odhady chyb u algoritmů a statistiku.

Neobvyklá typografie

This implies that both mappings are affine. Let us remind that affine mapping is a linear one if and only if the zero vector maps to zero. Since

$$F\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad G\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix},$$

the mapping F is linear, the mapping G is not. □

1.70. Let us consider a regular hexagon $ABCDEF$ (the vertices are labelled in the positive direction) with centre at the point $S=[1,0]$ and the vertex $A=[0,2]$. Determine the coordinates of the vertex C.

Solution. The coordinates of the vertex C can be obtained by rotating the point A around the centre S of the hexagon through the angle 120° in the positive direction:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix}\cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ)\\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ)\end{pmatrix}(A-S)+S \\ &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+[1,0]=[\tfrac{3}{2}-\sqrt{3},-1-\tfrac{\sqrt{3}}{2}] \boxed{1.26}\end{aligned}$$

□

1.71. Determine the angle between two vectors

(a) $u=(-3,-2)$, $v=(-2,3)$;
(b) $u=(2,6)$, $v=(-3,-9)$.

Solution. The angle φ we are looking for can be computed from the formula ([illegible]). Note that the vector $(-3,-2)$ can be obtained by changing the coordinates of the vector $(-2,3)$ and multiplying one of them by the number -1. But these operations are used when we want to obtain the vector normal to a vector of direction of a given line (or vice versa). Vectors in the case (a) are thus perpendicular, that is $\varphi=\pi/2$. In the case (b), since $-3\cdot(2,6)=2\cdot(-3,-9)$, the vector u is a multiple of the vector v. If one vector is a positive multiple of another, the angle between these two is clearly zero. In our case we have to multiply by a negative number, which gives $\varphi=\pi$. □

1.72. Determine the angle (the deviation) φ between two diagonals A_3A_7 and A_5A_{10} of a regular dodecagon (polygon with twelve sides) $A_0A_1A_2\dots A_{11}$.

Solution. The angle does not depended on the size of the given dodecagon. Let us choose the dodecagon inscribed in a circle with diameter 1. As in the previous exercise, we choose the coordinates of its vertices and then using a formula finish the computation that $\cos(\varphi)=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, that is $\varphi=75^\circ$.

In this way we have described exactly all so-called *affine mappings of the plane* to itself.

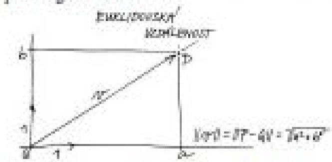
Such mappings allow us recomputing of coordinates which arose by different choices of origins and bases of directions for shifting. What happens, if our observer from the paragraph [illegible] will observe the plane from a different point, or chooses different points E_1, E_2? Try to think through that when speaking about coordinates the difference will be exactly realised by affine mapping. Later we will see general reasons why that holds in any dimension.

1.29. Euclidean plane. Let us now give our observer the ability to see and measure distance. For instance we can trust the common equation for the length of the vector $v=(a,b)$

$$\|v\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

in affine coordinates chosen by the observer. Immediately we can define notions as angle and rotation in the plane.

We can easily imagine it like this: our observer decides about some points E_1 and E_2 that they are at distance 1, and also decides that they are perpendicular. Distance in the direction of the coordinate axes are then given by the corresponding ratio, in general Euclid (Pythagorean) theorem is used. This leads to the equation given above.



Of course that our observer can work in a different manner. He can use some specific standard for real measurements of the distance of points P and Q in the plane and then say that exactly that is the length of the vector $Q-P$, which is necessary to shift from the P to Q. Then he picks some of the vectors which have size 1 and for instance using the triangle with sides of size 3, 4 and 5 constructs a perpendicular vector of size 1 and then continues as before.

Euclidean plane is an affine plane with a notion of distance as given above.

Naše předpoklady:

- Posluchači by měli po absolvování umět:
  - přesně formulovat základní pojmy a dokazovat jednoduchá tvrzení (to ale příliš netestujeme),
  - vnímat obsah i přibližně formulovaných vlastností,
  - vstřebat návody na užívání matematických modelů a osvojit si jejich využití.
- K těmto ambiciózním cílům nelze dojít lehce a pro většinu lidí to znamená hledat si vlastní cestičky s tápáním různými směry (s potřebným překonáváním odporu či nechutě). I proto učebnici říkáme **„Matematika drsně a svižně"**.
- Čtenáři jsou donuceni sami volit cestičku, jak textem projít.

Obsah výuky na FI MU (MB201)

- Rozvička -- stručný náznak o co půjde (4 týdny)
  - funkční závislosti, jednoduchá kombinatorika, diferenční rovnice 1. řádu,
  - klasická konečná a geometrická pravděpodobnost,
  - lineární algebra a geometrie v rovině.
- Lineární modely (5 týdnů)
  - vektorový a maticový počet
  - lineární iterační modely a diskrétní Markovovy řetězce
- Geometrie (afinní, euklidovská a projektivní – 3 týdny)

Obsah výuky na FI MU (MB202)

- Zřízení ZOO (4 týdny)
  - interpolace polynomy a splajny
  - spojité funkce a derivace (včetně topologie ***R*** mocninných řad)
- Diferenciální a integrální počet (5 týdnů)
  - derivování a integrování
  - nekonečné řady
- Spojité modely (3 týdny)
  - aproximace pomocí Fourierových řad
  - konvoluce, Fourierova transformace
  - metrické prostory

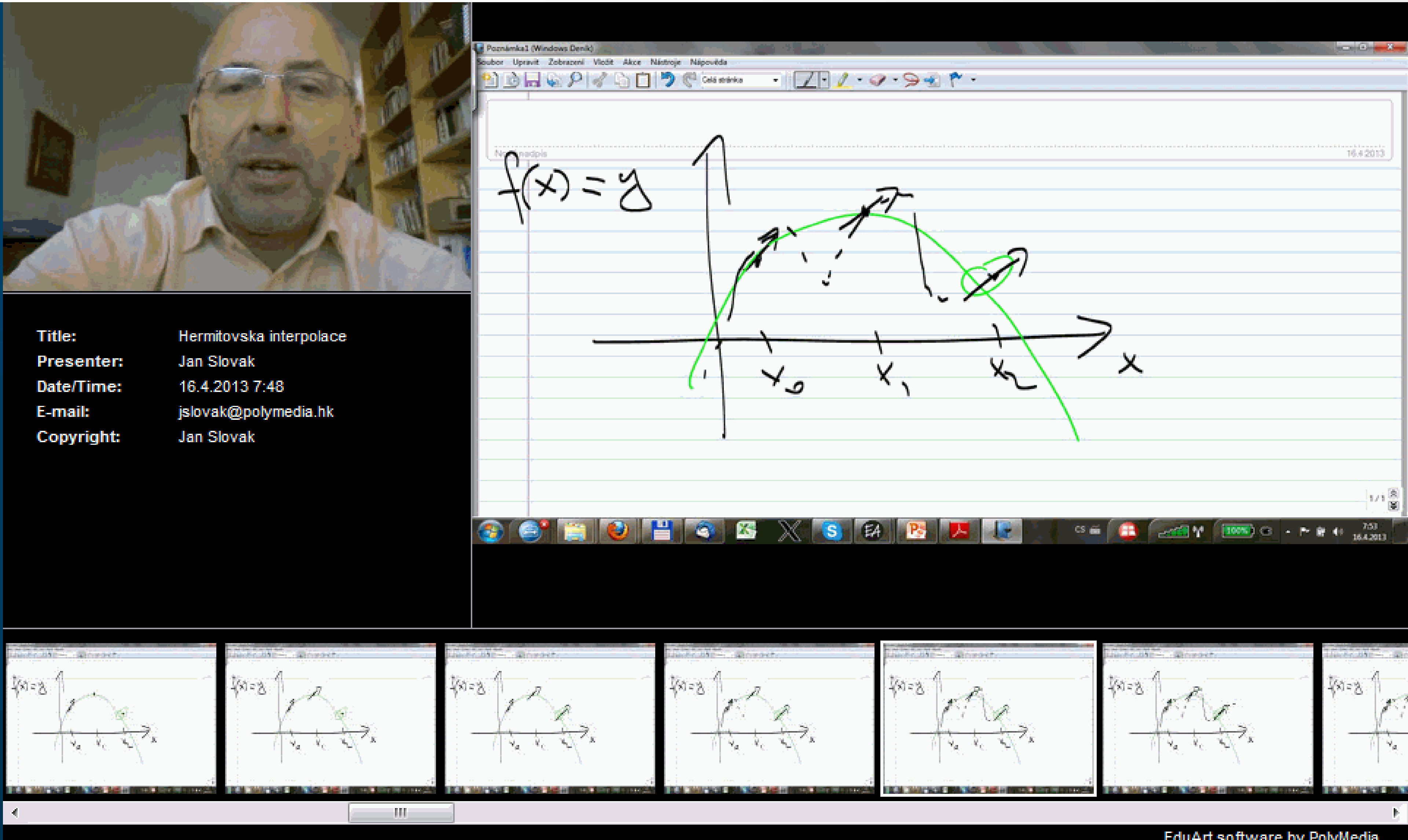
Obsah výuky na FI MU (MB203)

- Spojité modely s více proměnnými (6 týdnů)
  - diferenciální počet (extrémy, vázané extrémy, implicitní funkce)
  - integrální počet (Fubiniho věta, Stokesova věta),
  - obyčejné diferenciální rovnice
  - náznaky numerických metod
- Pravděpodobnost a statistika (6 týdnů)
  - popisná statistika,
  - pravděpodobnost,
  - matematická statistika (včetně porovnání Bayesiánského a frekvenčního přístupu)

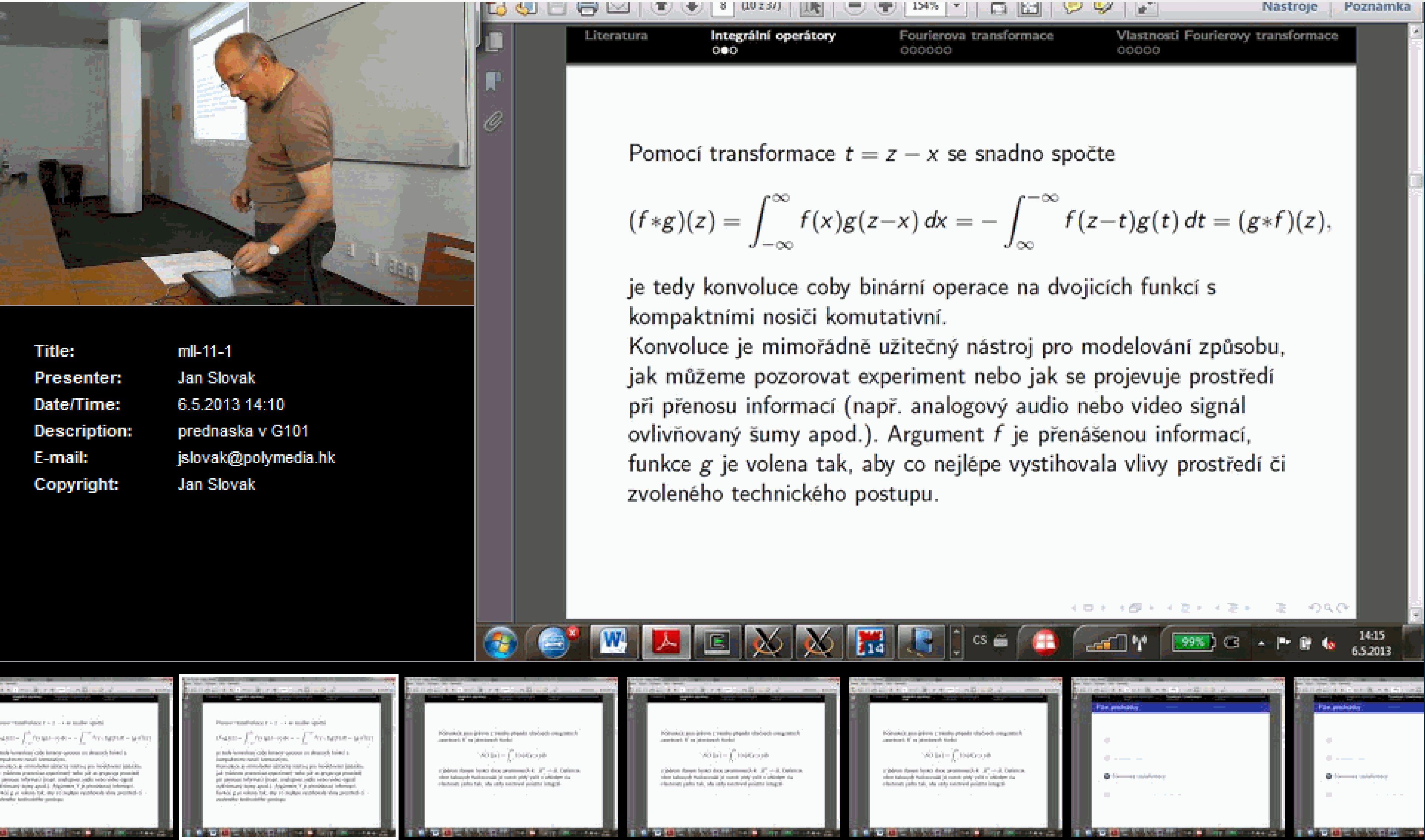
Obsah výuky na FI MU (MB204)

- Elementární teorie čísel (5 týdnů)
  - dělitelnost, kongruence, prvočíselnost, faktorizace
  - kryptografie a kódování
- Základy počítačové algebry (3 týdny)
  - grupy, okruhy polynomů, tělesa
  - výpočtová algebra (Gröbnerovy báze)
- Elementární kombinatorika (4 týdny)
  - binomická věta, vytvořující funkce, rekurence
  - aplikace v computer science

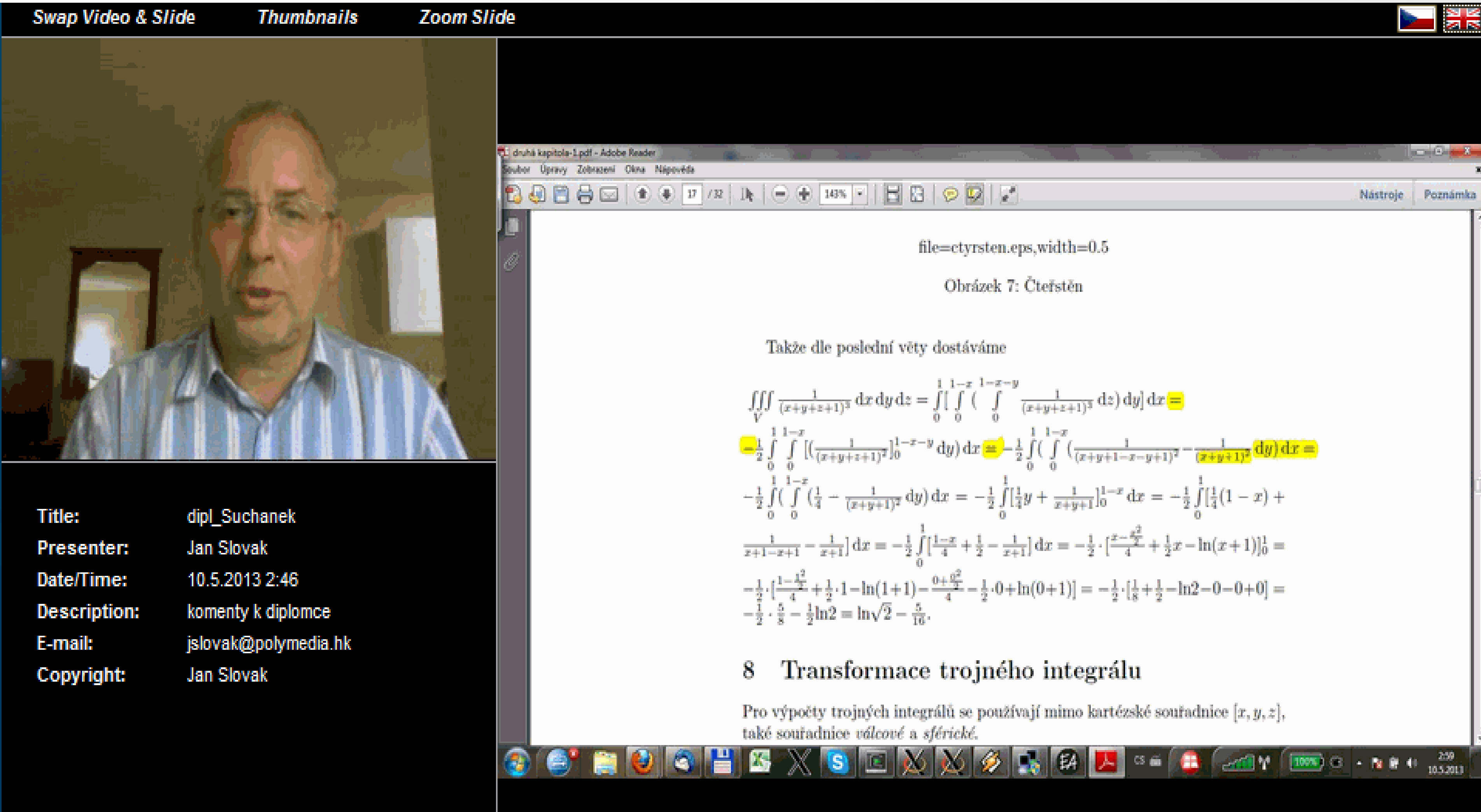
Schéma výuky – napřed prakticky!



... pak obvyklá přednáška a cvičení



… a případně i „virtuální konzultace"



Dojmy po 10 letech experimentu

- Výsledky anketních šetření potvrzují velice různorodé vnímání výuky. Od oslavných reakcí (spíše ojediněle, ale od dobrých studentů) až po úplně zatracující.
- Zdá se, že právě ta lepší část studentů dobře přijímá nový posuv od **„aplikované matematiky“** k **„matematice v aplikacích“**.
- Propadovost při výuce je značná (cca 35-50%). Domnívám se ale, že je zaviněna zejména liknavým přístupem studentů souvisejícím s nadbytečnou volností průchodu studiem.
- Úspěšní absolventi zpravidla nemají **nereálnou představu, že Matematiku už znají**.

Prototyp učebnice dopracujeme do formy „Brisk Guide to Mathematics“ – společný projekt s Flinders University (Austrálie)