Fuzzy logika a reálný svět, aneb jsou všechny hromady skutečně malé?

Jiří Močkoř

University of Ostrava
Department of Mathematics
Institute for Research and Applications of Fuzzy Modeling
30. dubna 22, 701 03 Ostrava 1, Czech Republic
mockor@osu.cz

June 11, 2014

Outline

Outline

Jazyk predikátové logiky

Definition

Jazyk predikátové logiky se skládá z

(1) predikátových symbolů P, Q, ... určitého typu,

(2) funkčních symbolů f, g, ... určitého typu,

(3) termů t, s, ...,

(4) formulí $\psi, \sigma, \ldots$.

Example

predikátové symboly: $\leq, \cong$, MalaHromada( )

funkční symboly: $+, \times, \otimes$, SpojDvaSymboly(,)

Jazyk predikátové logiky

Definition

Jazyk predikátové logiky se skládá z

(1) predikátových symbolů $P, Q, \dots$ určitého typu,

(2) funkčních symbolů $f, g, \dots$ určitého typu,

(3) termů $t, s, \dots$,

(4) formulí $\psi, \sigma, \dots$.

Example

predikátové symboly: $\leq, \cong$, MalaHromada( )

funkční symboly: $+, \times, \otimes$, SpojDvaSymboly(,)

Jazyk predikátové logiky

Definition

Jazyk predikátové logiky se skládá z

(1) predikátových symbolů $P, Q, \ldots$ určitého typu,

(2) funkčních symbolů $f, g, \ldots$ určitého typu,

(3) termů $t, s, \ldots$,

(4) formulí $\psi, \sigma, \ldots$.

Example

predikátové symboly: $\leq, \cong$, MalaHromada( )

funkční symboly: $+, \times, \otimes$, SpojDvaSymboly(,)

Jazyk predikátové logiky

Definition

Jazyk predikátové logiky se skládá z

(1) predikátových symbolů P, Q, ... určitého typu,

(2) funkčních symbolů f, g, ... určitého typu,

(3) termů t, s, ...,

(4) formulí $\psi, \sigma, \ldots$.

Example

predikátové symboly: $\leq, \cong$, MalaHromada( )

funkční symboly: $+, \times, \otimes$, SpojDvaSymboly(,)

Jazyk predikátové logiky

Definition

Jazyk predikátové logiky se skládá z

(1) predikátových symbolů $P, Q, \ldots$ určitého typu,

(2) funkčních symbolů $f, g, \ldots$ určitého typu,

(3) termů $t, s, \ldots$,

(4) formulí $\psi, \sigma, \ldots$.

Example

predikátové symboly: $\leq, \cong$, MalaHromada( )

funkční symboly: $+, \times, \otimes$, SpojDvaSymboly(,)

Jazyk predikátové logiky

Definition

Jazyk predikátové logiky se skládá z

(1) predikátových symbolů $P, Q, \ldots$ určitého typu,

(2) funkčních symbolů $f, g, \ldots$ určitého typu,

(3) termů $t, s, \ldots,$

(4) formulí $\psi, \sigma, \ldots$.

Example

predikátové symboly: $\leq, \cong,$ MalaHromada( )
funkční symboly: $+, \times, \otimes,$ SpojDvaSymboly(,)

Definition (Konstrukce termů)

(1) Každá proměnná je term.

(2) Jestliže f je n-ární funkční symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.

(3) Term je pouze to, co je vytvořeno v předchozích krocích.

Example

$$(x + y) + z, \quad \sin(y + z) * u, \quad SpojDvaTermy(x, yyyy)$$

Definition (Konstrukce termů)

(1) Každá proměnná je term.

(2) Jestliže f je n-ární funkční symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.

(3) Term je pouze to, co je vytvořeno v předchozích krocích.

Example

$$(x + y) + z, \quad \sin(y + z) * u, \quad SpojDvaTermy(x, yyyy)$$

Definition (Konstrukce termů)

(1) Každá proměnná je term.

(2) Jestliže f je n-ární funkční symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.

(3) Term je pouze to, co je vytvořeno v předchozích krocích.

Example

$$(x + y) + z, \quad \sin(y + z) * u, \quad SpojDvaTermy(x, yyyy)$$

Definition (Konstrukce termů)

(1) Každá proměnná je term.

(2) Jestliže f je n-ární funkční symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.

(3) Term je pouze to, co je vytvořeno v předchozích krocích.

Example

$$(x + y) + z, \quad \sin(y + z) * u, \quad SpojDvaTermy(x, yyyy)$$

Definition (Konstrukce termů)

(1) Každá proměnná je term.

(2) Jestliže f je n-ární funkční symbol a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.

(3) Term je pouze to, co je vytvořeno v předchozích krocích.

Example

$$(x + y) + z, \quad \sin(y + z) * u, \quad SpojDvaTermy(x, yyyy)$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi, (\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi, (\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi, (\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi, (\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Definition (Konstrukce formulí)

(1) Rovnost dvou termů $t_1 = t_2$ je formule.

(2) Jestliže P je n-arni predikát a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.

(3) Jestliže ψ, σ jsou formule, pak $\psi \wedge \sigma$, $\psi \vee \sigma$, $\psi \implies \sigma$, $\neg\psi$ jsou formule.

(4) Jestliže ψ je formule s volnou proměnnou x, pak $(\forall x)\psi, (\exists x)\psi$ jsou formule, kde x není volná proměnná.

Example

$$MalaHromada(1)$$

$$(\forall x)(MalaHromada(x) \implies MalaHromada(x+1))$$

Predikátová logika

Definition

Predikátová logika se skládá z

(1) Jazyka predikátové logiky (viz předchozí).

(2) Logických axiomů predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé "a priori".

(3) Odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi, \psi \implies \sigma}{\sigma}$$

Example (Příklady logických axiomů predikátové logiky)

$(\psi \implies \sigma) \iff (\neg\sigma \implies \neg\psi)$ (= důkaz sporem)

Predikátová logika

Definition

Predikátová logika se skládá z

(1) Jazyka predikátové logiky (viz předchozí).

(2) Logických axiomů predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé "a priori".

(3) Odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi, \psi \implies \sigma}{\sigma}$$

Example (Příklady logických axiomů predikátové logiky)

$(\psi \implies \sigma) \iff (\neg\sigma \implies \neg\psi)$ (= důkaz sporem)

Predikátová logika

Definition

Predikátová logika se skládá z

(1) Jazyka predikátové logiky (viz předchozí).

(2) Logických axiomů predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé "a priori".

(3) Odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi, \psi \implies \sigma}{\sigma}$$

Example (Příklady logických axiomů predikátové logiky)

$(\psi \implies \sigma) \iff (\neg\sigma \implies \neg\psi)$ (= důkaz sporem)

Predikátová logika

Definition

Predikátová logika se skládá z

(1) Jazyka predikátové logiky (viz předchozí).

(2) Logických axiomů predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé "a priori".

(3) Odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi, \psi \implies \sigma}{\sigma}$$

Example (Příklady logických axiomů predikátové logiky)

$(\psi \implies \sigma) \iff (\neg\sigma \implies \neg\psi)$ (= důkaz sporem)

Predikátová logika

Definition

Predikátová logika se skládá z

(1) Jazyka predikátové logiky (viz předchozí).

(2) Logických axiomů predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé "a priori".

(3) Odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi, \psi \implies \sigma}{\sigma}$$

Example (Příklady logických axiomů predikátové logiky)

$(\psi \implies \sigma) \iff (\neg\sigma \implies \neg\psi)$ (= důkaz sporem)

Kdy je formule pravdivá?

S logikou souvisí dva typy **pravdivosti**:

(1) **Syntaktická pravdivost** = Formální pojem pravdivosti založený na formálních pravidlech v dané logice. Symbolicky $\vdash \psi$

(2) **Sémantická pravdivost** = Pojem pravdivosti založený na významové interpretaci dané logiky v nějakém modelu. Symblicky $\models \psi$

Kdy je formule pravdivá?

S logikou souvisí dva typy **pravdivosti**:

(1) **Syntaktická pravdivost** = Formální pojem pravdivosti založený na formálních pravidlech v dané logice. Symbolicky $\vdash \psi$

(2) **Sémantická pravdivost** = Pojem pravdivosti založený na významové interpretaci dané logiky v nějakém modelu. Symblicky $\models \psi$

Kdy je formule pravdivá?

S logikou souvisí dva typy **pravdivosti**:

(1) **Syntaktická pravdivost** = Formální pojem pravdivosti založený na formálních pravidlech v dané logice. Symbolicky $\vdash \psi$

(2) **Sémantická pravdivost** = Pojem pravdivosti založený na významové interpretaci dané logiky v nějakém modelu. Symblicky $\models \psi$

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,

(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,

(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.

(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.

(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,

(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,

(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.

(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.

(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,

(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,

(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.

(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.

(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,

(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,

(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.

(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.

(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,
(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,
(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.
(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.
(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,

(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,

(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.

(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.

(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Sémantická pravdivost v logice

Pojem "pravda" se intepretuje v **modelu**.

Definition (Model predikátové logiky)

Stavebními prvky modelu jsou:

(1) Nějaká množina **A**,

(2) Predikát **P** v množině **A**, jakožto interpretace predikátového symbolu P,

(3) Funkce **f** v množině **A**, jakožto intepretace funkčního symbolu f.

(4) Ohodnocení w volných proměnných x, tj. $x \mapsto w(x) \in \mathbf{A}$.

(5) Interpretace logických spojek $\wedge, \vee, \implies, \neg$ v pravdivostních hodnotách $\{true, false\}$.

Pravdivost formule v modelu

Definition

Výsledkem intepretace formule ψ v modelu $(A, \mathbf{P}, \mathbf{f}, w)$ je pravdivostní hodnota $\|\psi\| \in \{true, false\}$

Example

Nechť $\psi = MalaHromada$. Model je definován takto:

(1) $A =$ množina přirozených čísel,

(2) Interpretace predikátu *MalaHromada* je podmnožina $malahromada = (1, 10^6) \subseteq A$,

(3) Ohodnocení x je definováno např. jako $w(x) = 10^5$.

Pak $\|\psi\|(w) = malahromada(10^5) = true$, protože $10^5 \in malahromada$.

Pravdivost formule v modelu

Definition

Výsledkem intepretace formule ψ v modelu $(A, \mathbf{P}, \mathbf{f}, w)$ je pravdivostní hodnota $\|\psi\| \in \{\textit{true}, \textit{false}\}$

Example

Nechť $\psi = \textit{MalaHromada}$. Model je definován takto:

(1) $A =$ množina přirozených čísel,

(2) Interpretace predikátu *MalaHromada* je podmnožina $\textit{malahromada} = (1, 10^6) \subseteq A$,

(3) Ohodnocení x je definováno např. jako $w(x) = 10^5$.

Pak $\|\psi\|(w) = \textit{malahromada}(10^5) = \textit{true}$, protože $10^5 \in \textit{malahromada}$.

Pravdivost formule v modelu

Definition

Výsledkem intepretace formule ψ v modelu $(A, \mathbf{P}, \mathbf{f}, w)$ je pravdivostní hodnota $\|\psi\| \in \{true, false\}$

Example

Nechť $\psi = MalaHromada$. Model je definován takto:

(1) $A =$ množina přirozených čísel,

(2) Interpretace predikátu *MalaHromada* je podmnožina $malahromada = (1, 10^6) \subseteq A$,

(3) Ohodnocení x je definováno např. jako $w(x) = 10^5$.

Pak $\|\psi\|(w) = malahromada(10^5) = true$, protože $10^5 \in malahromada$.

Pravdivost formule v modelu

Definition

Výsledkem intepretace formule ψ v modelu $(A, \mathbf{P}, \mathbf{f}, w)$ je pravdivostní hodnota $\|\psi\| \in \{true, false\}$

Example

Nechť $\psi = MalaHromada$. Model je definován takto:

(1) A = množina přirozených čísel,

(2) Interpretace predikátu *MalaHromada* je podmnožina $malahromada = (1, 10^6) \subseteq A$,

(3) Ohodnocení x je definováno např. jako $w(x) = 10^5$.

Pak $\|\psi\|(w) = malahromada(10^5) = true$, protože $10^5 \in malahromada$.

Pravdivost formule v modelu

Definition

Výsledkem intepretace formule ψ v modelu $(A, \mathbf{P}, \mathbf{f}, w)$ je pravdivostní hodnota $\|\psi\| \in \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$

Example

Nechť $\psi = \mathit{MalaHromada}$. Model je definován takto:

(1) $A =$ množina přirozených čísel,

(2) Interpretace predikátu *MalaHromada* je podmnožina $\mathit{malahromada} = (1, 10^6) \subseteq A$,

(3) Ohodnocení x je definováno např. jako $w(x) = 10^5$.

Pak $\|\psi\|(w) = \mathit{malahromada}(10^5) = \mathit{true}$, protože $10^5 \in \mathit{malahromada}$.

Pravdivost formule v modelu

Definition

Výsledkem intepretace formule ψ v modelu $(A, \mathbf{P}, \mathbf{f}, w)$ je pravdivostní hodnota $\|\psi\| \in \{true, false\}$

Example

Nechť $\psi = MalaHromada$. Model je definován takto:

(1) $A =$ množina přirozených čísel,

(2) Interpretace predikátu *MalaHromada* je podmnožina $malahromada = (1, 10^6) \subseteq A$,

(3) Ohodnocení x je definováno např. jako $w(x) = 10^5$.

Pak $\|\psi\|(w) = malahromada(10^5) = true$, protože $10^5 \in malahromada$.

Pravdivá formule (nezávisle na volbě modelu)

Definition

Formule ψ je pravdivá (symbolicky $\models \psi$), když v každém modelu je $\|\psi\| = true$.

Theorem

Nechť ψ je formule. Pak

$$\vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi.$$

Pravdivá formule (nezávisle na volbě modelu)

Definition

Formule ψ je pravdivá (symbolicky $\models \psi$), když v každém modelu je $\|\psi\| = true$.

Theorem

Nechť ψ je formule. Pak

$$\vdash \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi.$$

Outline

Pravdivost versus intuitivní pravdivost formulí

V reálném životě často pro jednotlvé formule nepoužíváme exaktní pravdivost

$$\models,$$

používáme určitou intuitivní pravdivost

$$\models_{int},$$

vycházející z našich zkušeností.

Vztah mezi exaktní a intuitivní pravdivostí

Vystihuje exaktní logika dobře naše intuitivní vnímání pravdivosti, tj. platí následující "metavěta"?

Theorem (?)

Pro každou formuli ψ platí vztah

$$\models \psi \quad = \quad \models_{int} \psi.$$

Vztah mezi exaktní a intuitivní pravdivostí

Vystihuje exaktní logika dobře naše intuitivní vnímání pravdivosti, tj. platí následující "metavěta"?

Theorem (?)

Pro každou formuli ψ platí vztah

$$\models \psi \quad = \quad \models_{int} \psi.$$

Příklad exaktně pravdivé formule

Theorem (Věta o Matematické indukci)

Nechť $\psi(n)$ je formule s volnou proměnnou n. Nechť

$$\models \psi(0),$$
$$\models (\forall n \in \mathbb{N})(\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)).$$

Pak $\models (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n)$.

Intuitivní verse věty o matematické indukvci

Theorem (Intuitivní věta o Matematické indukci)

Nechť $\psi(n)$ je formule s volnou proměnnou n. Nechť

$$\models_{int} \psi(0),$$
$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})(\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)).$$

Pak $\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n)$.

Otázka: Platí tato intuitivní verse?

Odpověď : Neplatí

Intuitivní verse věty o matematické indukvci

Theorem (Intuitivní věta o Matematické indukci)

Nechť $\psi(n)$ *je formule s volnou proměnnou n. Nechť*

$$\models_{int} \psi(0),$$
$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})(\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)).$$

Pak $\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n)$.

Otázka: Platí tato intuitivní verse?

Odpověď : Neplatí

Intuitivní verse věty o matematické indukvci

Theorem (Intuitivní věta o Matematické indukci)

Nechť $\psi(n)$ je formule s volnou proměnnou n. Nechť

$$\models_{int} \psi(0),$$
$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})(\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)).$$

Pak $\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n)$.

Otázka: Platí tato intuitivní verse?
Odpověď : Neplatí

Příklad - problém matematické indukce

Example

Nechť $\psi(n)$ popisuje formuli "n zrnek písku netvoří velkou hromadu".
Pak intuitivně jistě platí

(1) $\models_{int} \psi(0)$,tj. nula zrnek netvoří velkou hromadu.

(2) $\models_{int} \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$, tj. jestliže n zrnek netvoří velkou hromadu pak také $n+1$ zrnek netvoří velkou hromadu.

Pokud $\models \quad = \quad \models_{int}$, pak podle věty o matematické indukci by mělo platit

$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n),$$

tj. **neexistuje žádná velká hromada zrnek písku.**

Příklad - problém matematické indukce

Example

Nechť $\psi(n)$ popisuje formuli "n zrnek písku netvoří velkou hromadu".
Pak intuitivně jistě platí

(1) $\models_{int} \psi(0)$,tj. nula zrnek netvoří velkou hromadu.

(2) $\models_{int} \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$, tj. jestliže n zrnek netvoří velkou hromadu pak také $n+1$ zrnek netvoří velkou hromadu.

Pokud $\models \quad = \quad \models_{int}$, pak podle věty o matematické indukci by mělo platit

$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n),$$

tj. **neexistuje žádná velká hromada zrnek písku.**

Příklad - problém matematické indukce

Example

Nechť $\psi(n)$ popisuje formuli "n zrnek písku netvoří velkou hromadu".
Pak intuitivně jistě platí

(1) $\models_{int} \psi(0)$,tj. nula zrnek netvoří velkou hromadu.

(2) $\models_{int} \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$, tj. jestliže n zrnek netvoří velkou hromadu pak také $n+1$ zrnek netvoří velkou hromadu.

Pokud $\models \; = \; \models_{int}$, pak podle věty o matematické indukci by mělo platit

$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n),$$

tj. **neexistuje žádná velká hromada zrnek písku.**

Příklad - problém matematické indukce

Example

Nechť $\psi(n)$ popisuje formuli "n zrnek písku netvoří velkou hromadu".
Pak intuitivně jistě platí

(1) $\models_{int} \psi(0)$,tj. nula zrnek netvoří velkou hromadu.

(2) $\models_{int} \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$, tj. jestliže n zrnek netvoří velkou hromadu pak také $n+1$ zrnek netvoří velkou hromadu.

Pokud $\models \; = \; \models_{int}$, pak podle věty o matematické indukci by mělo platit

$$\models_{int} (\forall n \in \mathbb{N})\psi(n),$$

tj. **neexistuje žádná velká hromada zrnek písku.**

Příklad - problém pravidla modus ponens

Example

V predikátové logice by platilo následující odvozovací pravidlo:

$$\frac{\text{mám alespoň 2 vlasy, mám vlasy} \;\Rightarrow\; \text{nejsem plešatý}}{\text{nejsem plešatý}}.$$

Ve skutečnosti však intuitivně víme, že se 2 vlasy jsem zcela jistě plešatý.

Příklad - problém pravidla modus ponens

Example

V predikátové logice by platilo následující odvozovací pravidlo:

$$\frac{\text{mám alespoň 2 vlasy, mám vlasy} \;\Rightarrow\; \text{nejsem plešatý}}{\text{nejsem plešatý}}.$$

Ve skutečnosti však intuitivně víme, že se 2 vlasy jsem zcela jistě plešatý.

Nepříjemný výsledek

Závěr:existuje rozpor mezi našim intuitivním myšlením a myšlením v souladu s predikátovou logikou

Theorem (metavěta o nerovnosti exaktní a intuitivní pravdy)

$$\models \;\neq\; \models_{int}$$

Nepříjemný výsledek

Závěr:existuje rozpor mezi našim intuitivním myšlením a myšlením v souladu s predikátovou logikou

Theorem (metavěta o nerovnosti exaktní a intuitivní pravdy)

$$\models \quad \neq \quad \models_{int}$$

Jak problém vyřešit?

Dvě možnosti řešení:

(a) Přizpůsobit naše intuitivní myšlení exaktní logice,

(b) Přizpůsobit exaktní logiku našemu intuitivnímu myšlení.

Varianta (b) = Vícehodnotová logika

Jak problém vyřešit?

Dvě možnosti řešení:

(a) Přizpůsobit naše intuitivní myšlení exaktní logice,

(b) Přizpůsobit exaktní logiku našemu intuitivnímu myšlení.

Varianta (b) = Vícehodnotová logika

Jak problém vyřešit?

Dvě možnosti řešení:

(a) Přizpůsobit naše intuitivní myšlení exaktní logice,

(b) Přizpůsobit exaktní logiku našemu intuitivnímu myšlení.

Varianta (b) = Vícehodnotová logika

Jak problém vyřešit?

Dvě možnosti řešení:

(a) Přizpůsobit naše intuitivní myšlení exaktní logice,
(b) Přizpůsobit exaktní logiku našemu intuitivnímu myšlení.

Varianta (b) = Vícehodnotová logika

Outline

V čem spočívá podstata problémů?

Example (Příklad problémů - lidský faktor)

U části formulí popisujících realitu nelze jednoznačné rozhodnout, zda jejich pravdivostní hodnota je buď 0 nebo 1:

(1) "Jsem plešatý" může být pravdivý s jistým stupněm pravdivosti mezi 0 a 1.

(2) Hromada *n* zrnek písku odpovídá pojmu "velká hromada" s různým stupněm pravdivosti v závislosti na velikosti *n* .

V čem spočívá podstata problémů?

Example (Příklad problémů - lidský faktor)

U části formulí popisujících realitu nelze jednoznačné rozhodnout, zda jejich pravdivostní hodnota je buď 0 nebo 1:

(1) "Jsem plešatý" může být pravdivý s jistým stupněm pravdivosti mezi 0 a 1.

(2) Hromada n zrnek písku odpovídá pojmu "velká hromada" s různým stupněm pravdivosti v závislosti na velikosti n .

V čem spočívá podstata problémů?

Example (Příklad problémů - lidský faktor)

U části formulí popisujících realitu nelze jednoznačné rozhodnout, zda jejich pravdivostní hodnota je buď 0 nebo 1:

(1) "Jsem plešatý" může být pravdivý s jistým stupněm pravdivosti mezi 0 a 1.

(2) Hromada n zrnek písku odpovídá pojmu "velká hromada" s různým stupněm pravdivosti v závislosti na velikosti n .

Ohodnocené formule - možné řešení problémů

Definition

Ohodnocená formule vícehodnotové logiky je dvojice ψ/a, kde ψ je formule predikátové logiky, a (tzv. **stupeň pravdivosti formule**) je nějaká hodnota z uspořádané struktury Ω (= obor pravdivosti hodnot, např. interval $[0, 1]$).

Example

$\psi(n)$ je formule "n zrnek písku netvoří velkou hromadu". Pak můžeme např. stanovit

$$\psi(n)/(1 - \frac{n}{10^7})$$

Ohodnocené formule - možné řešení problémů

Definition

Ohodnocená formule vícehodnotové logiky je dvojice ψ/a, kde ψ je formule predikátové logiky, *a* (tzv. **stupeň pravdivosti formule**) je nějaká hodnota z uspořádané struktury Ω (= obor pravdivosti hodnot, např. interval $[0, 1]$).

Example

$\psi(n)$ je formule "*n* zrnek písku netvoří velkou hromadu". Pak můžeme např. stanovit

$$\psi(n)/(1 - \frac{n}{10^7})$$

Outline

Struktura pravdivostních hodnot fuzzy logiky

Definition

Strukturou pravdivostních hodnot ve fuzzy logice je obecně tzv. **residuovaný svaz** $(\Omega, \sqcap, \sqcup, \otimes, \rightarrow)$

Example (Lukasiewiczova algebra)

$([0, 1], \min, \max, \otimes, \rightarrow)$,kde

$$a \otimes b = \max(0, a + b - 1), a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b)$$

Struktura pravdivostních hodnot fuzzy logiky

Definition

Strukturou pravdivostních hodnot ve fuzzy logice je obecně tzv. **residuovaný svaz** $(\Omega, \sqcap, \sqcup, \otimes, \rightarrow)$

Example (Lukasiewiczova algebra)

$([0,1], \min, \max, \otimes, \rightarrow)$,kde

$$a \otimes b = \max(0, a + b - 1), a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b)$$

Predikátová fuzzy logika

Definition

Predikátová fuzzy logika nad residuovaným svazem Ω se skládá z

(1) jazyka klasické predikátové logiky (viz předchozí)

(2) ohodnocených logických axiomů klasické predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé se stupněm 1

(3) ohodnocených odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi/a, (\psi \implies \sigma)/b}{\sigma/a \otimes b}$$

Predikátová fuzzy logika

Definition

Predikátová fuzzy logika nad residuovaným svazem Ω se skládá z

(1) jazyka klasické predikátové logiky (viz předchozí)

(2) ohodnocených logických axiomů klasické predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé se stupněm 1

(3) ohodnocených odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi/a, (\psi \implies \sigma)/b}{\sigma/a \otimes b}$$

Predikátová fuzzy logika

Definition

Predikátová fuzzy logika nad residuovaným svazem Ω se skládá z

(1) jazyka klasické predikátové logiky (viz předchozí)

(2) ohodnocených logických axiomů klasické predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé se stupněm 1

(3) ohodnocených odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi/a, (\psi \implies \sigma)/b}{\sigma/a \otimes b}$$

Predikátová fuzzy logika

Definition

Predikátová fuzzy logika nad residuovaným svazem Ω se skládá z

(1) jazyka klasické predikátové logiky (viz předchozí)

(2) ohodnocených logických axiomů klasické predikátové logiky, tj. speciálních formulí, které jsou prohlášeny za pravdivé se stupněm 1

(3) ohodnocených odvozovacích pravidel, např. pravidla **modus ponens** ve tvaru

$$\frac{\psi/a, (\psi \implies \sigma)/b}{\sigma/a \otimes b}$$

Práce s ohodnocenými formulemi

Definition

Nechť $\psi/a, \varphi/b$ jsou ohodnocené formule, kde a, b jsou z Lukasiewiczovy algebry $[0, 1]$.Pak definujeme

(1) Stupeň pravdivosti $(\psi \wedge \varphi)$ je $\min(a, b)$,

(2) Stupeň pravdivosti $(\psi \vee \varphi)$ je $\max(a, b)$,

(3) Stupeň pravdivosti $(\neg\psi)$ je $a \to 0$,

(4) Stupeň pravdivosti $(\psi \Rightarrow \varphi)$ je $\min(1, 1 - a + b)$.

Příklad

Example

Nechť $\psi(n)/(1-\frac{n}{10^7})$ je ohodnocená formule "n zrnek písku netvoří velkou hromadu". Pak pravdivostní hodnota formule

$$\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$$

je

$$\min(1, 1-1+\frac{n}{10^7}+1-\frac{n+1}{10^7}) \quad = \quad 1-\frac{1}{10^7}.$$

Vztah fuzzy logiky a pojmu pravda

S fuzzy logikou souvisí také dva typy **pravdivosti**:

(1) Formální pojem stupně pravdivosti založený na formálních (**syntaktických**) pravidlech v dané logice.

(2) Interpretovaný pojem stupně pravdivosti založený na významové interpretaci (**sémantice**) dané logiky v nějakém modelu.

Vztah fuzzy logiky a pojmu pravda

S fuzzy logikou souvisí také dva typy **pravdivosti**:

(1) Formální pojem stupně pravdivosti založený na formálních (**syntaktických**) pravidlech v dané logice.

(2) Interpretovaný pojem stupně pravdivosti založený na významové interpretaci (**sémantice**) dané logiky v nějakém modelu.

Vztah fuzzy logiky a pojmu pravda

S fuzzy logikou souvisí také dva typy **pravdivosti**:

(1) Formální pojem stupně pravdivosti založený na formálních (**syntaktických**) pravidlech v dané logice.

(2) Interpretovaný pojem stupně pravdivosti založený na významové interpretaci (**sémantice**) dané logiky v nějakém modelu.

Výsledek interpretace formule

Definition

(1) Výsledkem syntaktické interpretace formule ψ je syntaktický stupeň pravdivosti formule, symbolicky

$$\vdash_a \psi.$$

(2) Výsledkem sémantické interpretace formule ψ je sémantický stupeň pravdivosti formule, symbolicky

$$\models_a \psi.$$

Fuzzy množiny

Definition (Fuzzy množiny)

Nechť U je množina. Pak **fuzzy množina** v U (s hodnotami v residuovaném svazu Ω) je zobrazení $A : U \to \Omega$, symbolicky $A \underset{\sim}{\subset} U$.

Example

$U = ([0, 120]), A \underset{\sim}{\subset} U$
representuje "mladé lidi". Pak lze např. definovat $A(10) = 1, A(30) = 0.8, A(45) = 0.3$ atd.

Fuzzy množiny

Definition (Fuzzy množiny)

Nechť U je množina. Pak **fuzzy množina** v U (s hodnotami v residuovaném svazu Ω) je zobrazení $A : U \to \Omega$, symbolicky $A \underset{\sim}{\subset} U$.

Example

$U = ([0, 120]), A \underset{\sim}{\subset} U$
representuje "mladé lidi". Pak lze např. definovat $A(10) = 1, A(30) = 0.8, A(45) = 0.3$ atd.

Model fuzzy logiky

Definition

Modelem fuzzy logiky v množině U je způsob, jak každé formuli ψ z fuzzy logiky s volnou proměnnou x přiřadit fuzzy množinu $\|\psi\| \underset{\sim}{\subset} U$ tak, že pokud pro $u \in U$ je ve fuzzy logice dána ohodnocená formule $\psi(u)/a$, pak musí být $a = \|\psi\|(u)$. Pokud ψ je uzavřená formule, pak $\|\psi\| \in \Omega$.

Example (Příklad konstrukce modelu formulí)

(1) $\|\psi \wedge \sigma\|(x) = \|\psi\|(x) \otimes \|\sigma\|(x)$,

(2) $\|\psi \Rightarrow \sigma\|(x) = \|\psi\|(x) \to \|\sigma\|(x)$,

(3) $\|(\forall x)\psi\| = \bigwedge\{\|\psi\|(y) : y \in U\} \in \Omega$,

(4) $\|(\exists x)\psi\| = \bigvee\{\|\psi\|(y) : y \in U\} \in \Omega$.

Model fuzzy logiky

Definition

Modelem fuzzy logiky v množině U je způsob, jak každé formuli ψ z fuzzy logiky s volnou proměnnou x přiřadit fuzzy množinu $\|\psi\| \underset{\sim}{\subseteq} U$ tak, že pokud pro $u \in U$ je ve fuzzy logice dána ohodnocená formule $\psi(u)/a$, pak musí být $a = \|\psi\|(u)$. Pokud ψ je uzavřená formule, pak $\|\psi\| \in \Omega$.

Example (Příklad konstrukce modelu formulí)

(1) $\|\psi \wedge \sigma\|(x) = \|\psi\|(x) \otimes \|\sigma\|(x)$,

(2) $\|\psi \Rightarrow \sigma\|(x) = \|\psi\|(x) \rightarrow \|\sigma\|(x)$,

(3) $\|(\forall x)\psi\| = \bigwedge\{\|\psi\|(y) : y \in U\} \in \Omega$,

(4) $\|(\exists x)\psi\| = \bigvee\{\|\psi\|(y) : y \in U\} \in \Omega$.

Vztah mezi sémantikou a syntaxí

Theorem

Pro uzavřenou formuli ψ ve fuzzy logice platí

$$\vdash_1 \psi$$

právě když existuje model fuzzy logiky v nějaké množině U takový, že $\|\psi\| = 1$.

Outline

Velká hromada písku

Nechť $\psi(n)$ je formule "hromada n zrnek písku není velká". Uvažujme následující ohodnocené formule:

(1) $\psi(0)/1$,

(2) $((\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1))/(1-\varepsilon)$, kde $\varepsilon = \frac{1}{10^7}$.

Theorem

Existuje fuzzy model takový, že

$$\|(\exists n)\neg\psi(n)\| \quad = \quad 1,$$

tj.

$$\vdash_1 (\exists n)\neg\psi(n).$$

Tedy alespoň pro jedno n existuje hromada písku z n zrnek, která je velká.

Velká hromada písku

Nechť $\psi(n)$ je formule "hromada n zrnek písku není velká". Uvažujme následující ohodnocené formule:

(1) $\psi(0)/1$,

(2) $((\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1))/(1-\varepsilon)$, kde $\varepsilon = \frac{1}{10^7}$.

Theorem

Existuje fuzzy model takový, že

$$\|(\exists n)\neg\psi(n)\| = 1,$$

tj.

$$\vdash_1 (\exists n)\neg\psi(n).$$

Tedy alespoň pro jedno n existuje hromada písku z n zrnek, která je velká.

Velká hromada písku

Nechť $\psi(n)$ je formule "hromada n zrnek písku není velká". Uvažujme následující ohodnocené formule:

(1) $\psi(0)/1$,

(2) $((\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1))/(1-\varepsilon)$, kde $\varepsilon = \frac{1}{10^7}$.

Theorem

Existuje fuzzy model takový, že

$$\|(\exists n)\neg\psi(n)\| \quad = \quad 1,$$

tj.

$$\vdash_1 (\exists n)\neg\psi(n).$$

Tedy alespoň pro jedno n existuje hromada písku z n zrnek, která je velká.

Idea důkazu

Budeme definovat model formule $\psi(n)$ v množině přirozených čísel N (tj. fuzzy množinu $\|\psi\| \underset{\sim}{\subset} N$) následovně:

$$\|\psi\|(0) = 1, \quad \|\psi\|(n+1) = \|\psi\|(n) \otimes (1 - \varepsilon).$$

V Lukasiewiczově algebře lze ukázat, že

$$\|\psi\|(n) = 1 - n.\varepsilon$$

Pak ale také lze ukázat

$$\|(\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)\| = \bigwedge_n \|\psi\|(n) \to (\|\psi(n)\| \otimes (1 - \varepsilon)) =$$

$$= \bigwedge_n (\neg\|\psi\|(n) \sqcup (1 - \varepsilon)) = 1 - \varepsilon$$

Tedy se opravdu jedná o model formule ψ.

Idea důkazu

Budeme definovat model formule $\psi(n)$ v množině přirozených čísel N (tj. fuzzy množinu $\|\psi\| \underset{\sim}{\subseteq} N$) následovně:

$$\|\psi\|(0) = 1, \quad \|\psi\|(n+1) = \|\psi\|(n) \otimes (1 - \varepsilon).$$

V Lukasiewiczově algebře lze ukázat, že

$$\|\psi\|(n) = 1 - n.\varepsilon$$

Pak ale také lze ukázat

$$\|(\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)\| = \bigwedge_n \|\psi\|(n) \to (\|\psi(n)\| \otimes (1-\varepsilon)) =$$

$$= \bigwedge_n (\neg\|\psi\|(n) \sqcup (1-\varepsilon)) = 1 - \varepsilon$$

Tedy se opravdu jedná o model formule ψ.

Idea důkazu

Budeme definovat model formule $\psi(n)$ v množině přirozených čísel N (tj. fuzzy množinu $\|\psi\| \underset{\sim}{\subset} N$) následovně:

$$\|\psi\|(0) = 1, \quad \|\psi\|(n+1) = \|\psi\|(n) \otimes (1 - \varepsilon).$$

V Lukasiewiczově algebře lze ukázat, že

$$\|\psi\|(n) = 1 - n.\varepsilon$$

Pak ale také lze ukázat

$$\|(\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)\| = \bigwedge_n \|\psi\|(n) \rightarrow (\|\psi(n)\| \otimes (1 - \varepsilon)) =$$

$$= \bigwedge_n (\neg\|\psi\|(n) \sqcup (1 - \varepsilon)) = 1 - \varepsilon$$

Tedy se opravdu jedná o model formule ψ.

Idea důkazu

Budeme definovat model formule $\psi(n)$ v množině přirozených čísel N (tj. fuzzy množinu $\|\psi\| \underset{\sim}{\subseteq} N$) následovně:

$$\|\psi\|(0) = 1, \quad \|\psi\|(n+1) = \|\psi\|(n) \otimes (1-\varepsilon).$$

V Lukasiewiczově algebře lze ukázat, že

$$\|\psi\|(n) = 1 - n.\varepsilon$$

Pak ale také lze ukázat

$$\|(\forall n)\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)\| = \bigwedge_n \|\psi\|(n) \to (\|\psi(n)\| \otimes (1-\varepsilon)) =$$
$$= \bigwedge_n (\neg\|\psi\|(n) \sqcup (1-\varepsilon)) = 1 - \varepsilon$$

Tedy se opravdu jedná o model formule ψ.

Lze dále dokázat, že platí

$$\|(\exists n)\neg\psi\| = \bigvee_{m} \|\neg\psi\|(m) = \bigvee_{m} m.\varepsilon = 1$$

Tedy $\vdash_1 (\exists n)\neg\psi$.

Děkuji za pozornost